

Κεφάλαιο 2

Προτυποποίηση συστημάτων: περιγραφές εισόδου – εξόδου

2.1 Εισαγωγή

Η εύρεση μαθηματικών προτύπων για την περιγραφή των συστημάτων λέγεται **προτυποποίηση** ή **μοντελοποίηση**. Πιο συγκεκριμένα, η μοντελοποίηση συνίσταται στη διατύπωση μαθηματικών σχέσεων που συνδέουν μεταξύ τους τις εισόδους, τις εξόδους και τις παραμέτρους του συστήματος. Είναι δυνατόν επίσης, εκτός από τις εισόδους και τις εξόδους, να περιγράφονται στο μαθηματικό πρότυπο και άλλες μεταβλητές, οι οποίες διαδραματίζουν κύριο ρόλο στη λειτουργία του συστήματος: τέτοιες είναι οι **μεταβλητές κατάστασης** και οι διαταραχές. Επειδή είναι σημαντική η γνώση της εξέλιξης του συστήματος στο χρονικό διάστημα της λειτουργίας του, χρησιμοποιούνται οι παράγωγοι, ως προς το χρόνο, των φυσικών ποσοτήτων που το χαρακτηρίζουν. Στην περίπτωση αυτή η περιγραφή ονομάζεται δυναμική και οι αντίστοιχες φυσικές ποσότητες ονομάζονται **δυναμικές**.

Η εύρεση μαθηματικών προτύπων αποτελεί έναν ιδιαίτερο κλάδο της θεωρίας συστημάτων. Η σημασία της είναι τεράστια, αφού τόσο η μελέτη των χαρακτηριστικών ενός συστήματος (δηλαδή η ανάλυση), όσο και ο σχεδιασμός κατάλληλων ελεγκτών (δηλαδή η σύνθεση), βασίζονται στο μαθηματικό πρότυπο. Συχνά λέγεται ότι για ένα σύστημα το στάδιο της μοντελοποίησης είναι πιο σημαντικό και από το στάδιο του ελέγχου.

Για την κατασκευή ενός μοντέλου χρειάζεται η γνώση (i) της **δομής** του και (ii) των **παραμέτρων** του. Η δομή του συστήματος προσδιορίζεται από τις μαθηματικές σχέσεις που συνδέουν τα χαρακτηριστικά του και που συνήθως είναι γνωστές από αντίστοιχους κλάδους της επιστήμης (μηχανική, ηλεκτρισμός, θερμότητα, χημεία, βιολογία,...). Όταν η γνώση αυτή δεν είναι διαθέσιμη, οι απαιτούμενες σχέσεις πρέπει να εξαχθούν από ένα μεγάλο πλήθος πειραματικών δοκιμών. Οι παράμετροι προσδιορίζονται με ειδικές αριθμητικές τεχνικές και αλγορίθμους που επίσης χρησιμοποιούν πειραματικά δεδομένα και που αποτελούν την **αναγνώριση** παραμέτρων. Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι ένα απλό ηλεκτρικό

κύκλωμα με πηγή ρεύματος, διακόπτη (επενεργητή), αντίσταση και αμπερόμετρο (αισθητήρα) διέπεται από τον νόμο του Ohm. Έτσι, είναι γνωστή η δομή του μαθηματικού προτύπου του $v(t) = Ri(t)$, όπου $v(t)$ είναι η τάση, $i(t)$ είναι το ρεύμα και R η αντίσταση. Οι μεταβλητές $v(t)$ και $i(t)$ είναι η είσοδος και η έξοδος, αντίστοιχα. Εφόσον η αντίσταση υποτίθεται σταθερή, είναι παράμετρος και για τον προσδιορισμό της τιμής της εφαρμόζεται μια μέθοδος αναγνώρισης.

Ένα σύστημα είναι δυνατόν να μοντελοποιηθεί με πολλούς τρόπους. Ανάλογα με τη φύση του και με τις συνθήκες λειτουργίας του, καθώς επίσης και με το σκοπό, για τον οποίο προορίζεται το μοντέλο, μια μαθηματική περιγραφή μπορεί να είναι καταλληλότερη από κάποιες άλλες. Για παράδειγμα, προκειμένου να μελετηθεί η χρονική απόκριση ή να υπολογιστεί ο βέλτιστος έλεγχος είναι προτιμότερη μια περιγραφή στο πεδίο του χρόνου, ενώ για τη μελέτη της ευστάθειας ή για το σχεδιασμό απλών αντισταθμιστών η περιγραφή στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας είναι πιο εύχρηστη. Καθώς καταstrώνεται ένα μαθηματικό πρότυπο, πρέπει να γίνει ένας συμβιβασμός μεταξύ απλότητας και ακρίβειας: το μοντέλο πρέπει να είναι τόσο απλό, ώστε να είναι εύχρηστο και, τόσο ακριβές, ώστε να περιγράφει επαρκώς το σύστημα. Τέλος, το μοντέλο, πριν γίνει αποδεκτό, ώστε να χρησιμοποιείται, πρέπει να επικυρωθεί, δηλαδή, να επαληθεύει τη λειτουργία ενός όσο το δυνατόν μεγαλύτερου αριθμού συστημάτων. Σε κάθε περίπτωση, η όλη διαδικασία βασίζεται στην προσομοίωση σε H/Y του συστήματος, με βάση τα υποψήφια μοντέλα του.

2.2 Διαφορικές εξισώσεις

Η πιο απλή περιγραφή εισόδου – εξόδου για ένα σύστημα δίνεται στο πεδίο του χρόνου με τη μορφή διαφορικής εξίσωσης. Στο αριστερό μέλος γράφεται η έξοδος $y(t)$ και παράγωγοί της μέχρι μια ορισμένη τάξη n , ενώ στο δεξιό μέλος γράφεται η είσοδος $u(t)$ και παράγωγοί της μέχρι μια ορισμένη τάξη m . Η σχέση που προκύπτει είναι της μορφής

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \quad (2.1)$$

Προκειμένου να είναι το σύστημα αιτιατό, επιβάλλεται ο περιορισμός $n \geq m$. Στην περιγραφή αυτή όλες οι μεταβλητές είναι συναρτήσεις του χρόνου $t \in (t_0, t_f)$, ενώ a_i , $i=1, \dots, n$ και b_i , $i=1, \dots, m$ είναι οι παράμετροι του συστήματος. Σε μερικές περιπτώσεις στην εξίσωση (2.1) υπάρχουν και όροι με ολοκληρώματα, όπως π.χ. στις περιγραφές ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

2.3 Συνάρτηση μεταφοράς

Η περιγραφή εισόδου – εξόδου στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας δίνεται με τη μορφή της **συνάρτησης μεταφοράς**.

Ορισμός 2.1

Η συνάρτηση μεταφοράς ορίζεται ως ο λόγος του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου $Y(s)$ προς τον μετασχηματισμό Laplace της εισόδου $U(s)$, υποθέτοντας ότι όλες οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές.

Έστω το γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο σύστημα που περιγράφεται με τη διαφορική εξίσωση (2.1). Μετασχηματίζοντας κατά Laplace και τα δύο μέλη της (2.1) προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς (ΣΜ)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.2)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (2.3)$$

πράγμα που σημαίνει ότι η ΣΜ επιτρέπει τον υπολογισμό της εξόδου, όταν είναι γνωστή η είσοδος του συστήματος. Σημειώνεται η καθοριστική σημασία των παραμέτρων του συστήματος.

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι μια ρητή συνάρτηση, εφόσον είναι λόγος δύο πολυωνύμων ως προς s και ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος ή ίσος προς τον βαθμό του παρονομαστή. Ο παρονομαστής της ΣΜ

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (2.4)$$

λέγεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** (ΧΠ) του συστήματος και έχει εξέχουσα σημασία στη συμπεριφορά του. Είναι φανερό ότι ο βαθμός του ΧΠ ισούται με την τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου της εξόδου. Αν ο βαθμός του ΧΠ είναι n , τότε το σύστημα λέγεται n -τάξης.

2.4 Κρουστική απόκριση

Η κρουστική απόκριση είναι μια ειδική περιγραφή εισόδου – εξόδου στο πεδίο του χρόνου και σχετίζεται άμεσα με τη συνάρτηση μεταφοράς.

Ορισμός 2.2

Η **κρουστική απόκριση** $g(t)$ ορίζεται ως η έξοδος ενός συστήματος, όταν είσοδος είναι η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$.

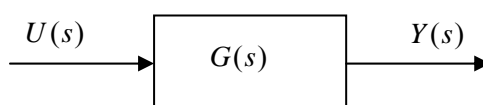
Στην πραγματικότητα ως είσοδος θεωρείται ένας παλμός που μαθηματικά εκφράζεται με τη συνάρτηση Dirac $\delta(t)$. Εφόσον είναι γνωστή η κρουστική απόκριση ενός συστήματος, η έξοδος του $y(t)$ για **οποιαδήποτε** είσοδο $u(t)$ μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της συνάρτησης μεταφοράς, διότι ισχύει

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] \quad (2.5)$$

με άλλα λόγια η ΣΜ προκύπτει μετασχηματίζοντας κατά Laplace την κρουστική απόκριση.

2.5 Διαγράμματα βαθμίδων

Το διάγραμμα βαθμίδων αποτελεί την εποπτική περιγραφή ενός συστήματος. Χρησιμοποιεί, τόσο τις συναρτήσεις μεταφοράς των επί μέρους στοιχείων και τμημάτων του συστήματος, που λέγονται **βαθμίδες** και παρίστανται με ορθογώνια, όσο και τη ροή σημάτων μεταξύ αυτών, που παρίστανται με βέλη. Οι συναρτήσεις μεταφοράς των επί μέρους στοιχείων αναγράφονται, συνήθως, μέσα στην αντίστοιχη βαθμίδα.

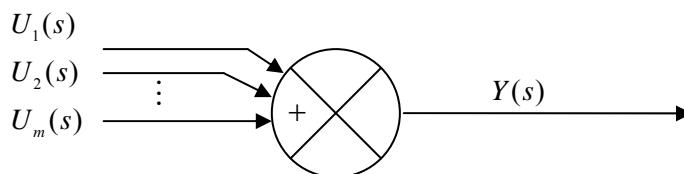


Σχήμα 2.1. Στοιχείο διαγράμματος βαθμίδων

Η έξοδος κάθε βαθμίδας ισούται με το γινόμενο της συνάρτησης μεταφοράς επί την είσοδό της. Γενικά, η λειτουργία του συστήματος μπορεί να γίνει πιο εύκολα κατανοητή εξετάζοντας το διάγραμμα βαθμίδων, παρά εξετάζοντας το ίδιο το φυσικό σύστημα. Έτσι, τα διαγράμματα βαθμίδων αποτελούν μια εύχρηστη περιγραφή σε περιπτώσεις πολύπλοκων συστημάτων. Στις παραγράφους που ακολουθούν δίνονται χαρακτηριστικές περιπτώσεις αναπαράστασης με διαγράμματα βαθμίδων.

2.5.1 Αθροιστικό σημείο / ανιχνευτής σφάλματος

Το αθροιστικό σημείο παράγει ένα σήμα που είναι το αλγεβρικό άθροισμα δύο ή περισσότερων σημάτων, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.2.



Σχήμα 2.2. Αθροιστικό σημείο

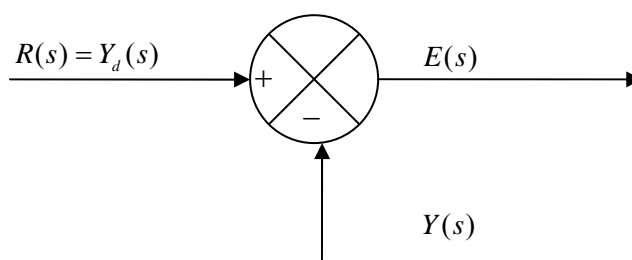
Ο κύκλος με τις σταυρωτές γραμμές (και μερικές φορές χωρίς αυτές) συμβολίζει την αλγεβρική άθροιση. Το κατάλληλο πρόσημο σε κάθε βέλος δείχνει αν θα γίνει πρόσθεση ή αφαίρεση των σημάτων. Προφανώς από το Σχ. 2.2 έχουμε

$$Y(s) = U_1(s) + U_2(s) + \dots + U_m(s) \quad (2.6)$$

Τα σήματα που αθροίζονται θα πρέπει να είναι της ίδιας φύσης (και άρα να έχουν τις ίδιες μονάδες μέτρησης) και της ίδιας τάξης μεγέθους. Όταν αυτό δεν συμβαίνει, χρησιμοποιούνται κατάλληλοι **μετατροπείς**.

Στην ειδική περίπτωση που στο αθροιστικό σημείο αφαιρούνται τα σήματα **εισόδου αναφοράς** (ή επιθυμητής εξόδου) και ανατροφοδότησης, αυτό λέγεται **ανιχνευτής σφάλματος** (Σχ. 2.3), διότι τότε

$$E(s) = Y(s) - R(s) \quad (2.7)$$

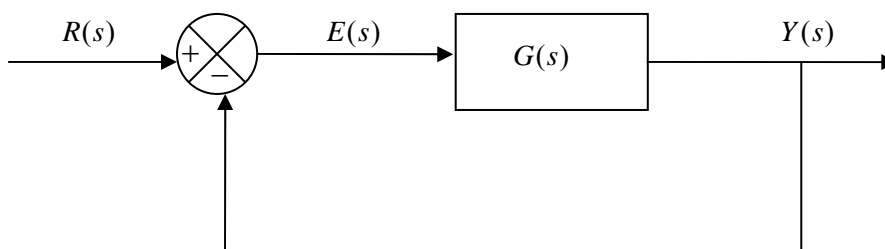


Σχήμα 2.3. Ανιχνευτής σφάλματος

Κατά το σχεδιασμό συστημάτων είναι πολύ σημαντική η σωστή επιλογή ανιχνευτών σφάλματος διότι τυχόν ατέλειές τους επηρεάζουν τη συμπεριφορά του κλειστού συστήματος.

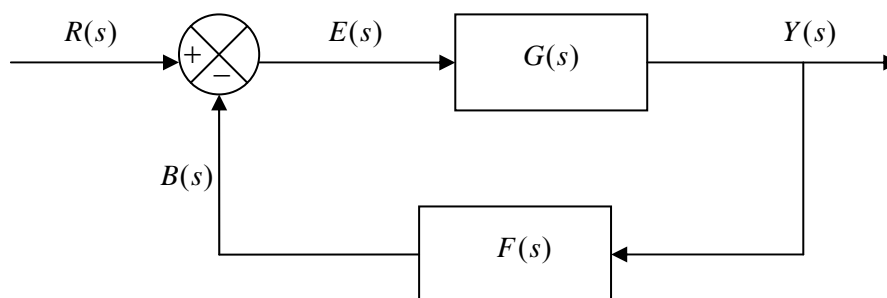
2.5.2 Διάγραμμα βαθμίδων συστήματος κλειστού βρόχου

Στο σύστημα κλειστού βρόχου η έξοδος $Y(s)$ ανατροφοδοτείται στο αθροιστικό σημείο, όπου συγκρίνεται με την είσοδο αναφοράς $R(s)$ (Σχ. 2.4). Κατόπιν, το παραγόμενο σφάλμα $E(s)$ εισάγεται ως πληροφορία στο σύστημα $G(s)$, ώστε αυτό να διορθώνει τη συμπεριφορά του.



Σχήμα 2.4. Σύστημα κλειστού βρόχου

Όπως ήδη αναφέρθηκε, όταν η έξοδος ανατροφοδοτείται στο αθροιστικό σημείο, προκειμένου να συγκριθεί με την είσοδο αναφοράς, πρέπει να μετατραπεί κατάλληλα ώστε τα δύο σήματα να είναι της ίδιας φύσης και της ίδιας τάξης μεγέθους. Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα ελέγχου θερμοκρασίας η έξοδος είναι συνήθως ένα σήμα θερμοκρασίας με τις κατάλληλες μονάδες. Αυτό πρέπει να μετατραπεί σε ένα σήμα άλλης μορφής (θέσης, δύναμης ή ηλεκτρικής ισχύος) για να μπορέσει να συγκριθεί με το αντίστοιχο σήμα εισόδου αναφοράς. Για τον λόγο αυτό, εισάγεται ένας μετατροπέας στον κλάδο ανατροφοδότησης, ο οποίος έχει συνάρτηση μεταφοράς $F(s)$. Το σήμα ανατροφοδότησης θα είναι τότε το $B(s) = F(s)Y(s)$.



Σχήμα 2.5. Σύστημα κλειστού βρόχου με μετατροπέα

Ο λόγος του σήματος ανατροφοδότησης $B(s)$ προς το σήμα σφάλματος $E(s)$ λέγεται **συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου** ή απλώς **συνάρτηση μεταφοράς βρόχου** και είναι

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)F(s) \quad (2.8)$$

Η **συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου** $\frac{Y(s)}{R(s)}$ προκύπτει από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)E(s) \\ E(s) &= R(s) - B(s) = R(s) - F(s)Y(s) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Απαλείφοντας το $E(s)$ προκύπτει

$$Y(s) = G(s)[R(s) - F(s)Y(s)] \quad (2.10)$$

ή

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)} \quad (2.11)$$

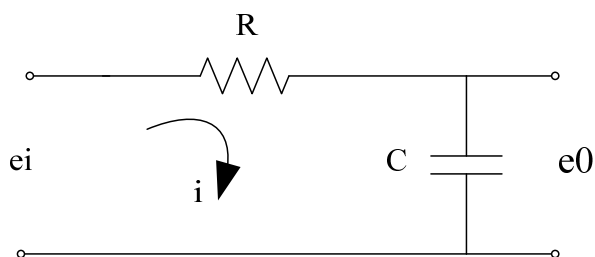
Αυτή είναι η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος.

Στο σύστημα με μοναδιαία ανάδραση της μορφής του Σχ. 2.4 είναι $F(s)=1$ και επομένως η συνάρτηση μεταφοράς βρόχου είναι η $G(s)$. Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου προκύπτει αντίστοιχα από την (2.11) για $F(s)=1$.

2.5.3 Διαδικασία σχεδιασμού διαγραμμάτων βαθμίδων

Προκειμένου να σχεδιάσουμε το διάγραμμα βαθμίδων ενός συστήματος, γράφουμε κατ' αρχήν τις εξισώσεις που περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά κάθε στοιχείου και κατόπιν παίρνουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των εξισώσεων αυτών, υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες. Κάθε μετασχηματισμένη κατά Laplace εξίσωση παρίσταται σαν μια βαθμίδα.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το δίκτυο του Σχ. 2.6.



Σχήμα 2.6. Ηλεκτρικό δίκτυο

Οι εξισώσεις του δικτύου είναι

$$i(t) = \frac{e_i(t) - e_o(t)}{R} \quad (2.12)$$

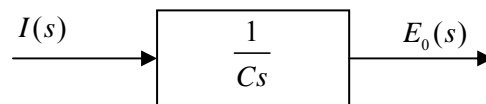
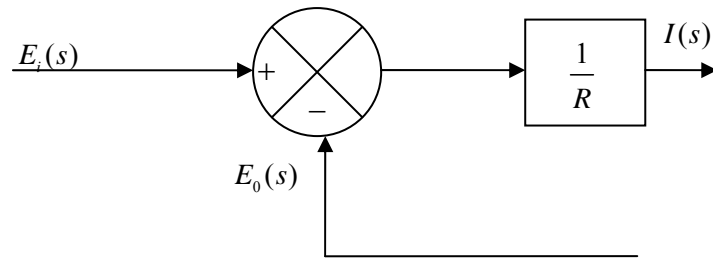
$$e_o(t) = \frac{\int i(t) dt}{C}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace αυτών των εξισώσεων είναι

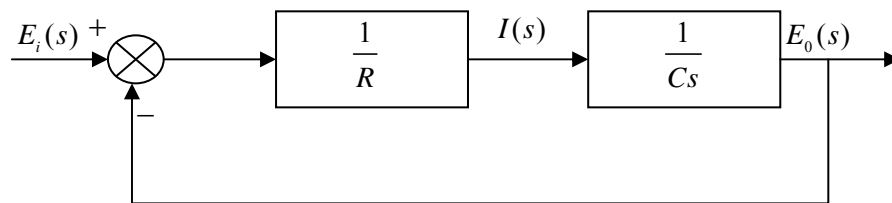
$$I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R} \quad (2.13)$$

$$E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

Για τις εξισώσεις αυτές έχουμε, αντίστοιχα, τα παρακάτω σχήματα.



Οπότε, το συνολικό διάγραμμα βαθμίδων είναι



Σχήμα 2.7. Διάγραμμα βαθμίδων ηλεκτρικού δικτύου

2.5.4 Απλοποίηση διαγραμμάτων βαθμίδων

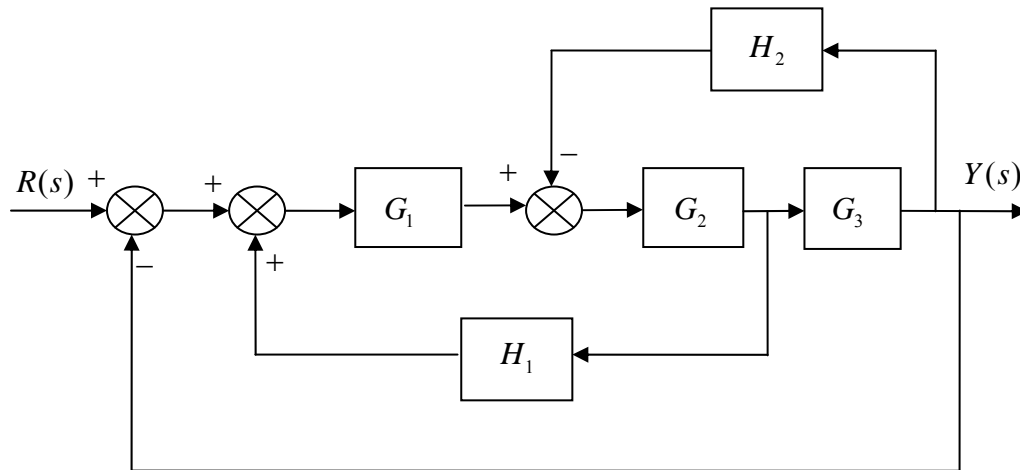
Πολύπλοκα διαγράμματα βαθμίδων μπορούν να αντικατασταθούν με απλούστερα, χάρη σε ειδικούς κανόνες. Οι κανόνες απλοποίησης δίνονται στον Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1 Ισοδυναμία διαγραμμάτων βαθμίδων

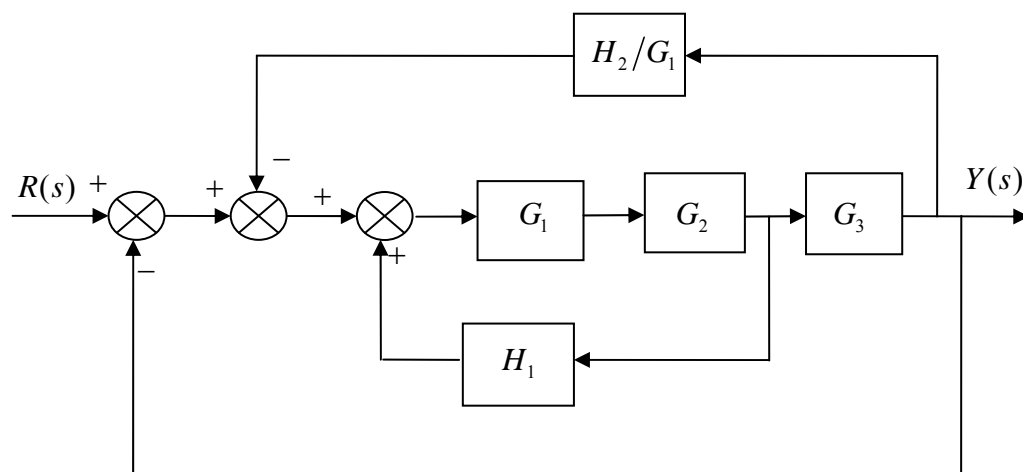
	ΑΡΧΙΚΟ	ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

2.5.5 Παράδειγμα απλοποίησης

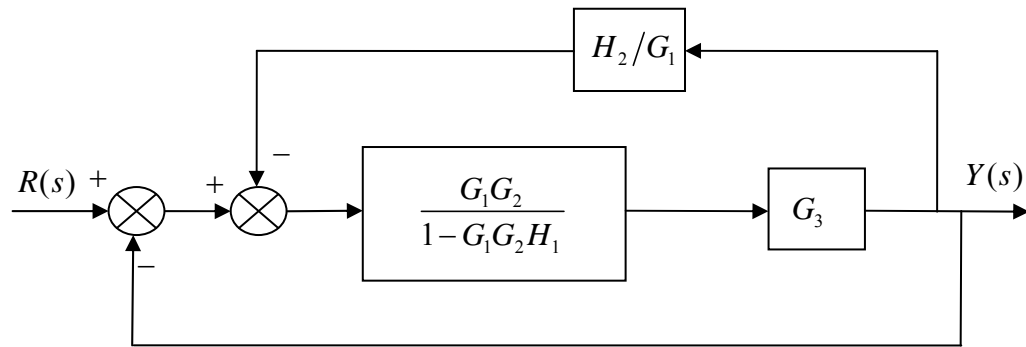
Στο παράδειγμα των παρακάτω σχημάτων γίνεται απλοποίηση χρησιμοποιώντας τους κανόνες της προηγούμενης παραγράφου. Το διάγραμμα του σχήματος



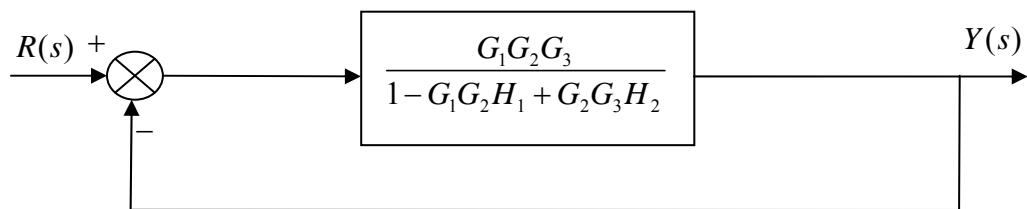
απλοποιείται στην μορφή



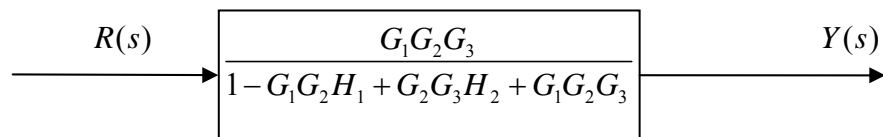
Απλοποιώντας την εσωτερική ανάδραση προκύπτει



και απλοποιώντας την εξωτερική

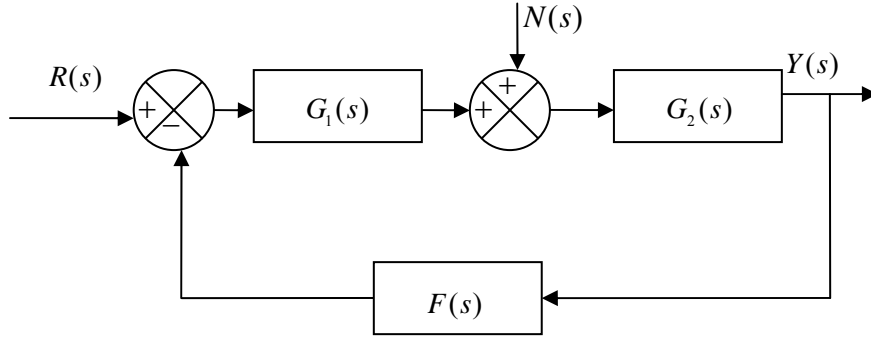


Τέλος, η περιγραφή εισόδου – εξόδου είναι



2.6 Σύστημα κλειστού βρόχου με διαταραχή

Όπως ήδη αναφέρθηκε, διαταραχή είναι κάθε σήμα που μπορεί να διεγείρει ένα σύστημα κατά τρόπο απρόβλεπτο και ανεξέλεγκτο. Ένα σύστημα μιας εισόδου – μιας εξόδου με διαταραχή απεικονίζεται στο Σχ. 2.8.



Σχήμα 2.8. Κλειστό σύστημα με διαταραχή

Θεωρούμε ότι το σύστημα διεγείρεται από δύο εισόδους: την είσοδο αναφοράς $R(s)$ και την εξωτερική διαταραχή $N(s)$. Στην περίπτωση αυτή επεξεργαζόμαστε κάθε είσοδο χωριστά από την άλλη. Επίσης, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, οι συνιστώσες της εξόδου, που αντιστοιχούν στην κάθε είσοδο, προστίθενται για να δώσουν την ολική έξοδο.

Η απόκριση του συστήματος μόνο ως προς τη διαταραχή είναι $Y_n(s)$ και μπορεί να υπολογιστεί από τη συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ $N(s)$ και $Y_n(s)$, όπως αυτή προκύπτει από το Σχ. 2.8.

$$\frac{Y_n(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)F(s)} \quad (2.14)$$

Αντίστοιχα, η απόκριση του συστήματος μόνο ως προς την είσοδο αναφοράς είναι $Y_r(s)$ και βρίσκεται από τη συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ $R(s)$ και $Y_r(s)$

$$\frac{Y_r(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)F(s)} \quad (2.15)$$

Η ολική έξοδος είναι

$$Y(s) = Y_n(s) + Y_r(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)F(s)} [G_1(s)R(s) + N(s)] \quad (2.16)$$

Έστω ότι $|G_1(s)F(s)| \gg 1$ και $|G_1(s)G_2(s)F(s)| \gg 1$. Οι συνθήκες αυτές μπορούν να εξασφαλιστούν με τον κατάλληλο ελεγκτή. Τότε, η συνάρτηση μεταφοράς $Y_n(s)/N(s)$ γίνεται σχεδόν μηδέν και επομένως η επίδραση της διαταραχής γίνεται αμελητέα. Αυτό είναι ένα πλεονέκτημα του συστήματος κλειστού βρόχου.

Εξάλλου, εφόσον $|G_1(s)G_2(s)F(s)| \gg 1$, η συνάρτηση μεταφοράς $Y_r(s)/R(s)$ τείνει στο $1/F(s)$. Άρα γίνεται ανεξάρτητη των $G_1(s)$, $G_2(s)$ και αντιστρόφως

ανάλογη της $F(s)$. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι οι όποιες μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος, που εκφράζονται ως μεταβολές των $G_1(s)$, $G_2(s)$, δεν επηρεάζουν την έξοδο του συστήματος. Αυτό είναι άλλο ένα πλεονέκτημα του κλειστού συστήματος. Επίσης, είναι προφανές ότι για $F(s)=1$ το κλειστό σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης τείνει να εξισώσει την έξοδο με την είσοδο.

2.7 Γραμμικοποίηση μη γραμμικού μαθηματικού προτύπου

Τα περισσότερα φυσικά συστήματα είναι στην πραγματικότητα μη γραμμικά και για να περιγραφούν με ακρίβεια απαιτούνται μη γραμμικά μαθηματικά μοντέλα. Επειδή όμως αυτά είναι δύσκολα, από μαθηματικής πλευράς, για τη μελέτη των συστημάτων, τα αντικαθιστούμε με απλούστερα, αλλά λιγότερο ακριβή, γραμμικά μοντέλα, υποθέτοντας ότι οι μεταβλητές του συστήματος έχουν πολύ μικρή (αμελητέα) απόκλιση από κάποιο σημείο λειτουργίας.

Έστω ένα μη γραμμικό σύστημα με είσοδο $u(t)$ και έξοδο $y(t)$. Η περιγραφή εισόδου – εξόδου είναι της μορφής

$$y(t) = f(u(t)) \quad (2.17)$$

όπου f είναι μια οποιαδήποτε μη γραμμική συνάρτηση. Έστω επίσης ότι το σημείο λειτουργίας του συστήματος αντιστοιχεί σε $\bar{u}(t)$, $\bar{y}(t)$. Τότε η σχέση (2.17) μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor στο σημείο $u = \bar{u}$, ως εξής:

$$y = f(u) = f(\bar{u}) + \frac{df}{du}(u - \bar{u}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{du^2}(u - \bar{u})^2 + \dots \quad (2.18)$$

Όπου οι παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο $u = \bar{u}$. Εφόσον η απόκλιση $u - \bar{u}$ είναι μικρή, μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους ανώτερης τάξης ως προς $u = \bar{u}$. Συνεπώς,

$$y(t) = \bar{y}(t) + K(u(t) - \bar{u}(t)) \quad (2.19)$$

όπου $\bar{y}(t) = f(\bar{u}(t))$ και $K = df / du$ για $u = \bar{u}$. Η (2.19) στη συνέχεια γράφεται

$$y(t) - \bar{y}(t) = K(u(t) - \bar{u}(t)) \quad (2.20)$$

που είναι μια γραμμική περιγραφή εισόδου – εξόδου.

Στη συνέχεια εξετάζουμε μια μη γραμμική περιγραφή, στην οποία η έξοδος είναι συνάρτηση δύο εισόδων.

$$y(t) = f(u_1(t), u_2(t)) \quad (2.21)$$

Η ανάπτυξη σε σειρά Taylor στο σημείο $(u_1, u_2) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ δίνει

$$y = f(u_1, u_2) = f(\bar{u}_1, \bar{u}_2) + \left[\frac{\partial f}{\partial u_1} (u_1 - \bar{u}_1) + \frac{\partial f}{\partial u_2} (u_2 - \bar{u}_2) \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} (u_1 - \bar{u}_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} (u_1 - \bar{u}_1)(u_2 - \bar{u}_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} (u_2 - \bar{u}_2)^2 \right] + \dots \quad (2.22)$$

Αγνοώντας και πάλι τους όρους ανώτερης τάξης, λαμβάνεται το γραμμικό μοντέλο

$$y(t) - \bar{y}(t) = K_1(u_1(t) - \bar{u}_1(t)) + K_2(u_2(t) - \bar{u}_2(t)) \quad (2.23)$$

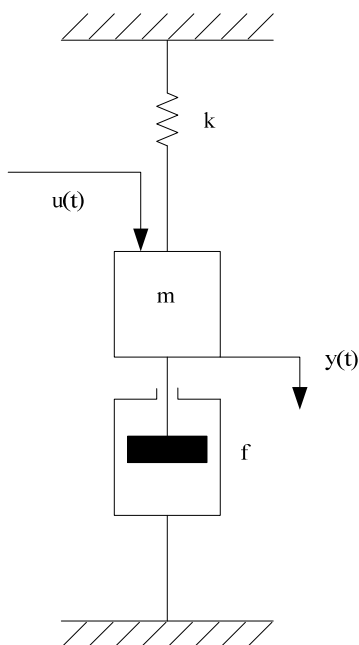
όπου $\bar{y}(t) = f(\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t))$ και $K_1 = \partial f / \partial u_1$ για $u_1 = \bar{u}_1$, $K_2 = \partial f / \partial u_2$ για $u_2 = \bar{u}_2$.

2.8 Μοντελοποίηση φυσικών συστημάτων

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται μερικά από τα συστήματα που συναντώνται συχνά στην πράξη και τα αντίστοιχα μαθηματικά τους πρότυπα.

2.8.1 Μηχανικό σύστημα μετατόπισης

Έστω ένα μηχανικό σύστημα που αποτελείται από μια μάζα m , ένα ελατήριο με σταθερά k και αποσβεστήρα με συντελεστή τριβής f , όπως στο Σχ. 2.9. Η δύναμη που επιδρά στη μάζα είναι η είσοδος u και η αντίστοιχη μετατόπιση είναι η έξοδος y .



Σχήμα 2.9. Μηχανικό σύστημα μετατόπισης

Για τη μαθηματική περιγραφή του συστήματος αυτού ακολουθείται η εξής διαδικασία:

1. Χρησιμοποιώντας τους φυσικούς νόμους που διέπουν το σύστημα, γράφεται η διαφορική εξίσωση του συστήματος
2. Μετασχηματίζεται κατά Laplace η διαφορική εξίσωση, υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες
3. Ο λόγος της εξόδου $Y(s)$ προς την είσοδο $U(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς

Για το σύστημα του Σχ. 2.9 είναι γνωστό από τη Μηχανική ότι

$$my^{(2)}(t) + fy^{(1)}(t) + ky(t) = u(t) \quad (2.24)$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace όλους τους όρους της (2.24), προκύπτει

$$\mathcal{L}[my^{(2)}(t)] = m[s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)] = ms^2Y(s)$$

$$\mathcal{L}[fy^{(1)}(t)] = f[sY(s) - y(0)] = fY(s)$$

$$\mathcal{L}[ky(t)] = kY(s)$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = U(s)$$

οπότε η (2.24) μετασχηματίζεται ως εξής:

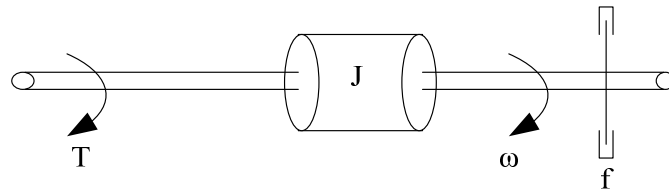
$$(ms^2 + fs + k)Y(s) = U(s) \quad (2.25)$$

και η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k} \quad (2.26)$$

2.8.2 Μηχανικό σύστημα περιστροφής

Το σύστημα περιστροφής αποτελείται από το φορτίο που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω και γωνιακή επιτάχυνση a , υπό την επίδραση της ροπής T . Το φορτίο έχει ροπή αδρανείας J και χαρακτηρίζεται από την ιξώδη τριβή με συντελεστή f .



Σχήμα 2.10. Μηχανικό σύστημα περιστροφής

Από τη Μηχανική είναι γνωστό ότι

$$T = J\omega^{(1)}(t) + f\omega(t) \quad (2.27)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της (2.27) δίνει

$$T(s) = [Js + f]\Omega(s) \quad (2.28)$$

όπου

$$T(s) = L[T(t)]$$

και

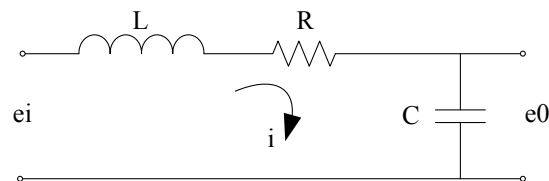
$$\Omega(s) = L[\omega(t)]$$

Εφόσον η ροπή T είναι η είσοδος του συστήματος και η γωνιακή ταχύτητα ω είναι η έξοδος, η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js + f} \quad (2.29)$$

2.8.3 Ηλεκτρικό δίκτυο

Έστω το ηλεκτρικό δίκτυο του Σχ.2.11. που αποτελείται από αυτεπαγωγή L , αντίσταση R και χωρητικότητα C .



Σχήμα 2.11. Ηλεκτρικό δίκτυο

Ο νόμος του Kirchhoff δίνει

$$Li^{(1)}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e_i$$

και

(2.30)

$$\frac{1}{C} \int i(t) dt = e_o$$

Από το μετασχηματισμό Laplace των εξισώσεων αυτών για μηδενικές αρχικές συνθήκες προκύπτει

$$sLI(s) + RI(s) + \frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_i(s)$$

(2.31)

$$\frac{1}{C} \frac{1}{s} I(s) = E_o(s)$$

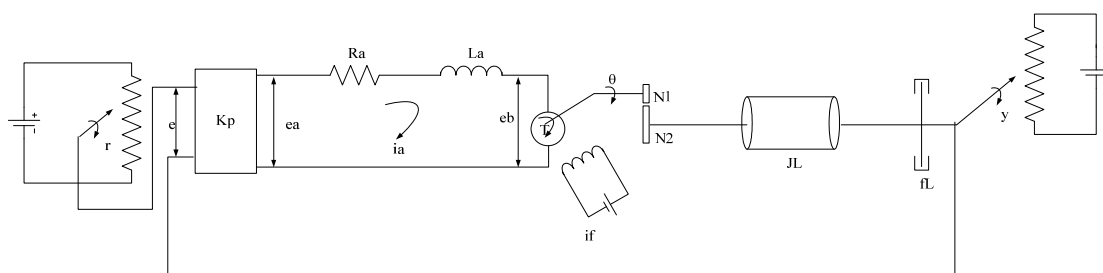
Εφόσον e_i είναι η είσοδος και e_o η έξοδος, η συνάρτηση μεταφοράς του δικτύου είναι

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

(2.32)

2.8.4 Σερβομηχανισμός θέσης

Ο σερβομηχανισμός θέσης αποτελείται από ηλεκτρικό κινητήρα και φορτίο, του οποίου επιδιώκεται η σταθερή γωνιακή ταχύτητα.



Σχήμα 2.12. Σερβομηχανισμός θέσης

Τα ποτενσιόμετρα στην είσοδο και στην έξοδο μετατρέπουν τη γωνιακή θέση σε ηλεκτρικό ρεύμα. Έτσι, οι μετατοπίσεις θέσης στην είσοδο και στην έξοδο του

συστήματος αποτελούν αντίστοιχα τις μεταβλητές εισόδου και εξόδου. Οι μεταβλητές και οι παράμετροι του συστήματος είναι τα παρακάτω μεγέθη:

- $r(t)$ (rad): γωνιακή μετατόπιση εισόδου αναφοράς
- $y(t)$ (rad): γωνιακή μετατόπιση εξόδου
- $\theta(t)$ (rad): γωνιακή μετατόπιση κινητήρα
- $K_1 = 24/\pi$ (volt/rad): κέρδος ανιχνευτή σφάλματος ποτενσιομέτρου
- $K_p = 10$ (volt/volt): κέρδος ενισχυτή
- $e_a(t)$ (volt): τάση οπλισμού
- $e_b(t)$ (volt): τάση emf
- $R_a = 0.2$ ohm: αντίσταση οπλισμού
- L_a (αμελητέα): αυτεπαγωγή οπλισμού
- $i_a(t)$ (amp): ρεύμα
- $K_b = 5.5 \times 10^{-2}$ volt: σταθερά
- $K = 6 \times 10^{-5}$ lb-ft/amp: σταθερά ροπής κινητήρα
- $J_m = 1 \times 10^{-5}$ lb-ft-sec²: ροπή αδρανείας κινητήρα
- f_m (αμελητέος): συντελεστής τριβής κινητήρα
- $J_L = 4.4 \times 10^{-3}$ lb-ft-sec²: ροπή αδρανείας φορτίου
- $f_L = 4 \times 10^{-2}$ lb-ft/rad/sec: συντελεστής τριβής φορτίου
- $n = N_1 / N_2 = 1/10$: λόγος μετάδοσης περιστροφικής κίνησης

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τη δυναμική του συστήματος είναι οι εξής:

- για τον ανιχνευτή σφάλματος ποτενσιομέτρου

$$E(s) = K_1[R(s) - Y(s)] = 7.64[R(s) - Y(s)]$$

- για τον ενισχυτή

$$E_a(s) = K_p E(s) = 10E(s)$$

- για τον κινητήρα dc

$$J = J_m + n^2 J_L = 1 \times 10^{-5} + 4.4 \times 10^{-5} = 5.4 \times 10^{-5}$$

$$f = f_m + n^2 f_L = 4 \times 10^{-4}$$

Από τον κινητήρα έχουμε τη σχέση

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

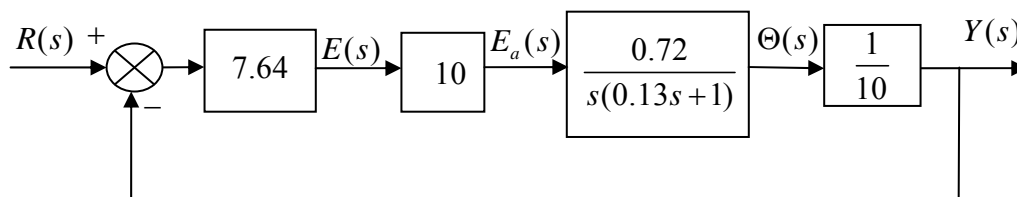
όπου

$$K_m = \frac{K}{R_a f_L + K K_b} = 0.72 \quad \text{και} \quad T_m = \frac{R_a J}{R_a f_L + K K_b} = 0.13$$

οπότε τελικά

$$\frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{10Y(s)}{E_a(s)} = \frac{0.72}{s(0.13s+1)}$$

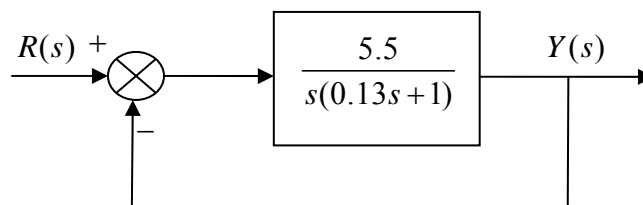
Με βάση τις προηγούμενες σχέσεις, το διάγραμμα βαθμίδων του συστήματος είναι



Σχήμα 2.13. Διάγραμμα βαθμίδων σερβομηχανισμού θέσης

Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{42.3}{s^2 + 7.7s + 42.3}$$



Σχήμα 2.14. Απλοποιημένο διάγραμμα βαθμίδων

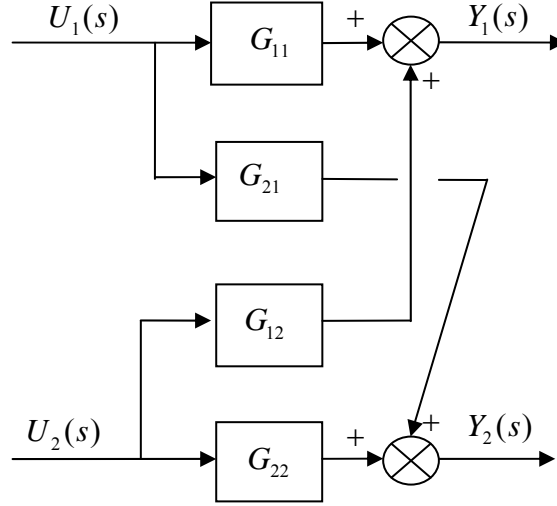
2.9 Πολυμεταβλητά συστήματα

2.9.1 Πίνακας μεταφοράς

Η συνάρτηση μεταφοράς που ορίστηκε στην παράγραφο 2.3 αφορά συστήματα μιας εισόδου – μιας εξόδου. Στην παράγραφο αυτή θα οριστεί η αντίστοιχη περιγραφή για συστήματα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων.

Έστω ένα σύστημα m εισόδων και r εξόδων. Όπως ήδη αναφέρθηκε, μπορεί να θεωρηθεί ότι οι m είσοδοι είναι οι συνιστώσες του $m \times 1$ διανύσματος εισόδου

$u(t)$ και αντίστοιχα οι r εξόδοι αποτελούν το $r \times 1$ διάνυσμα εξόδου $y(t)$. Ο $r \times m$ πίνακας που συνδέει το μετασχηματισμό Laplace του διανύσματος εξόδου με το μετασχηματισμό Laplace του διανύσματος εισόδου λέγεται **πίνακας μεταφοράς**. Έστω το σύστημα του Σχ. 2.15.



Σχήμα 2.15 Σύστημα δύο εισόδων – δύο εξόδων

Το σύστημα αυτό έχει δύο εισόδους, $U_1(s)$ και $U_2(s)$, και δύο εξόδους, $Y_1(s)$ και $Y_2(s)$, που συνδέονται με τις σχέσεις

$$Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s) \quad (2.25)$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s)$$

όπου G_{ij} είναι η συνάρτηση μεταφοράς που συνδέει την i έξοδο με την j είσοδο. Οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφούν σε διανυσματική μορφή

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Ένα σύστημα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων λέγεται **πολυμεταβλητό σύστημα**. Στη γενική περίπτωση m εισόδων και r εξόδων η περιγραφή έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \cdots & G_{rm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

όπου

$$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_r(s) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

είναι το διάνυσμα εξόδου διάστασης $r \times 1$,

$$U(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

είναι το διάνυσμα εισόδου διάστασης $m \times 1$ και

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \cdots & G_{rm}(s) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

είναι ο πίνακας μεταφοράς διάστασης $r \times m$.

2.9.2 Μηχανικό πολυμεταβλητό σύστημα

Έστω ένα μηχανικό σύστημα που αποτελείται από δύο μάζες m_1 , m_2 , δύο ελατήρια με σταθερές k_1 , k_2 και αποσβεστήρα με συντελεστή τριβής f_1 , όπως στο Σχ. 2.16. Οι δυνάμεις που επιδρούν στις μάζες είναι οι είσοδοι u_1 και u_2 . Οι αντίστοιχες μετατοπίσεις είναι οι έξοδοι y_1 και y_2 . Από τη Μηχανική είναι γνωστό ότι οι εξισώσεις που διέπουν το σύστημα αυτό είναι

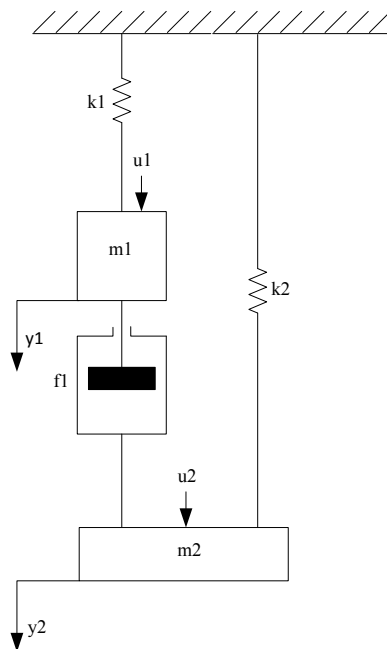
$$m_1 y_1^{(2)}(t) + f_1(y_1^{(1)}(t) - y_2^{(1)}(t)) + k_1 y_1(t) = u_1(t) \quad (2.31)$$

$$m_2 y_2^{(2)}(t) + f_1(y_2^{(1)}(t) - y_1^{(1)}(t)) + k_2 y_2(t) = u_2(t)$$

Υποθέτοντας ότι το σύστημα είναι αρχικά ακίνητο και επομένως οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, ο μετασχηματισμός Laplace των (2.31) δίνει

$$(m_1 s^2 + f_1 s + k_1)Y_1(s) - f_1 s Y_2(s) = U_1(s) \quad (2.32)$$

$$(m_2 s^2 + f_1 s + k_2)Y_2(s) - f_1 s Y_1(s) = U_2(s)$$



Σχήμα 2.16. Μηχανικό πολυμεταβλητό σύστημα

ή υπό μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + f_1 s + k_1 & -f_1 s \\ -f_1 s & m_2 s^2 + f_1 s + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και τα δύο μέλη της (2.33) με τον αντίστροφο του 2×2 πίνακα $P(s)$

$$P(s) = \begin{bmatrix} m_1 s^2 + f_1 s + k_1 & -f_1 s \\ -f_1 s & m_2 s^2 + f_1 s + k_2 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

προκύπτει η περιγραφή εισόδου – εξόδου και ο πίνακας μεταφοράς

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} m_2 s^2 + f_1 s + k_2 & f_1 s \\ f_1 s & m_1 s^2 + f_1 s + k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

όπου

$$\Delta = (m_1 s^2 + f_1 s + k_1)(m_2 s^2 + f_1 s + k_2) - f_1^2 s^2 \neq 0 \quad (2.36)$$

2.9.3 Πολυμεταβλητό σύστημα με διαταραχή

Έστω το σύστημα του Σχ 2.8. Το σύστημα αυτό έχει δύο εισόδους, την είσοδο αναφοράς $R(s)$ και τη διαταραχή $N(s)$. Η έξοδος του είναι η $Y(s)$. Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.6, η έξοδος είναι

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)F(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)F(s)} N(s) \quad (2.37)$$

Από αυτήν προκύπτει η σχέση εισόδου – εξόδου και ο πίνακας μεταφοράς

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)F(s)} & \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)F(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

2.10 Κύρια σημεία

- Διαφορικές εξισώσεις
- Συνάρτηση μεταφοράς
- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο
- Τάξη συστήματος
- Κρουστική απόκριση
- Μοντελοποίηση φυσικών συστημάτων
- Διαγράμματα βαθμίδων – απλοποίηση
- Συνάρτηση μεταφοράς βρόχου – συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου
- Συστήματα με σήματα διαταραχής
- Γραμμικοποίηση μη-γραμμικού μοντέλου
- Πολυμεταβλητά συστήματα

2.11 Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

Άσκηση 2.1

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς για κάθε ένα από τα συστήματα που περιγράφονται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις, υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες.

$$(α) \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = r(t)$$

Λύση

$$sY(s) + 2Y(s) = R(s) \Rightarrow Y(s)(s + 2) = R(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s + 2}$$

$$(\beta) \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dr(t)}{dt} + 4r(t)$$

Λύση

$$sY(s) + 3Y(s) = sR(s) + 4R(s) \Rightarrow Y(s)(s + 3) = R(s)(s + 4) \Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s + 4}{s + 3}$$

$$(\gamma) 3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = r(t)$$

Λύση

$$3s^2 Y(s) + 5sY(s) - 2Y(s) = R(s) \Rightarrow Y(s)(3s^2 + 5s - 2) = R(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{3s^2 + 5s - 2}$$

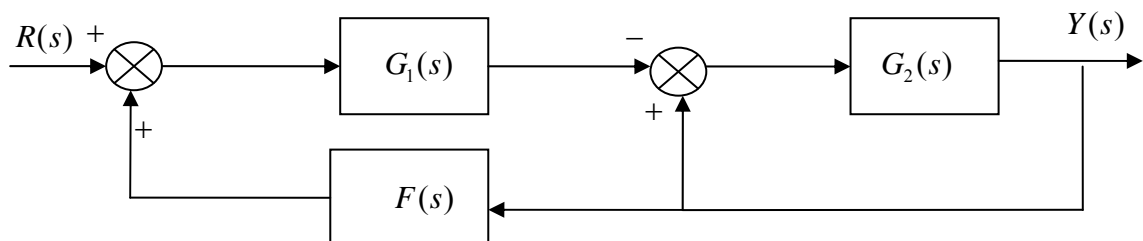
$$(\delta) \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} + r(t - a), \text{ όπου } r(t - a) = 0, \text{ για } t < a \text{ (χρονική καθυστέρηση)}$$

Λύση

$$sY(s) = sR(s) + e^{-as} R(s) \Rightarrow sY(s) = R(s)(s + e^{-as}) \Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s + e^{-as}}{s} = 1 + \frac{1}{se^{as}}$$

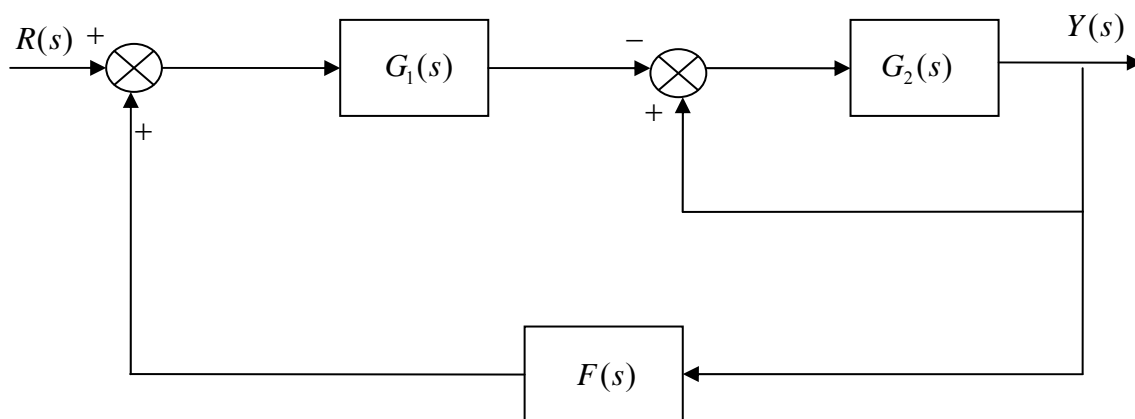
Άσκηση 2.2

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με διάγραμμα βαθμίδων όπως του σχήματος



Λύση

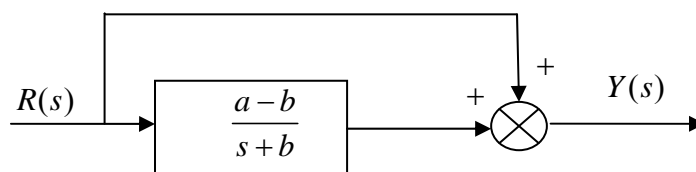
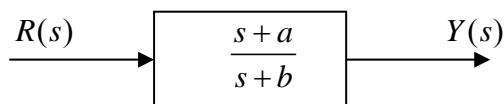
Το διάγραμμα είναι ισοδύναμο με το



$$H(s) = \frac{-G_1(s) \frac{G_2(s)}{1-G_2(s)}}{1-F(s) \frac{-G_1(s)G_2(s)}{1-G_2(s)}} = \frac{\frac{-G_1(s)G_2(s)}{1-G_2(s)}}{\frac{1-G_2(s)+F(s)G_1(s)G_2(s)}{1-G_2(s)}} = \frac{-G_1(s)G_2(s)}{1-G_2(s)+F(s)G_1(s)G_2(s)}$$

Άσκηση 2.3

Ναδειχθεί ότι τα παρακάτω διαγράμματα βαθμίδων έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς.



Λύση

Από το δεύτερο διάγραμμα προκύπτει

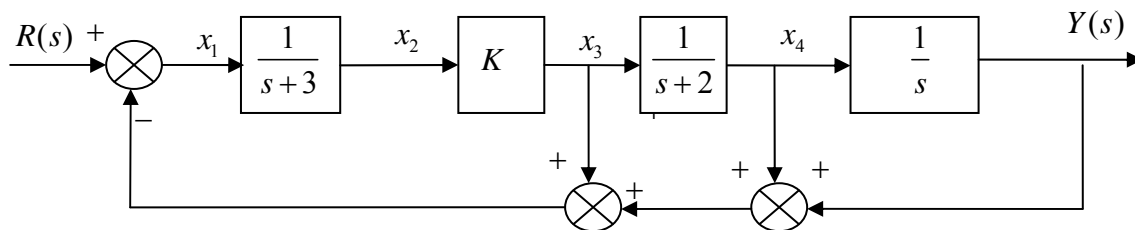
$$Y(s) = R(s) + \frac{a-b}{s+b} R(s) = R(s) \left[1 + \frac{a-b}{s+b} \right] = R(s) \frac{s+a}{s+b}$$

Διαφορετικά, επειδή στο δεύτερο διάγραμμα έχουμε παράλληλες βαθμίδες, θα είναι

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left[1 + \frac{a-b}{s+b} \right] = \frac{s+a}{s+b}$$

Άσκηση 2.4

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος



Λύση

Από το σχήμα έχουμε

$$\left. \begin{aligned} x_1 \frac{1}{s+3} &= x_2 \\ x_2 K &= x_3 \\ x_3 \frac{1}{s+2} &= x_4 \\ x_4 \frac{1}{s} &= Y \\ x_1 &= R - x_3 - x_4 - Y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{K}(s+3)(s+2)sY \\ x_2 &= \frac{1}{K}(s+2)sY \\ x_3 &= (s+2)sY \\ x_4 &= sY \\ \frac{1}{K}(s+3)(s+2)sY &= R - (s+2)sY - sY - Y \end{aligned}$$

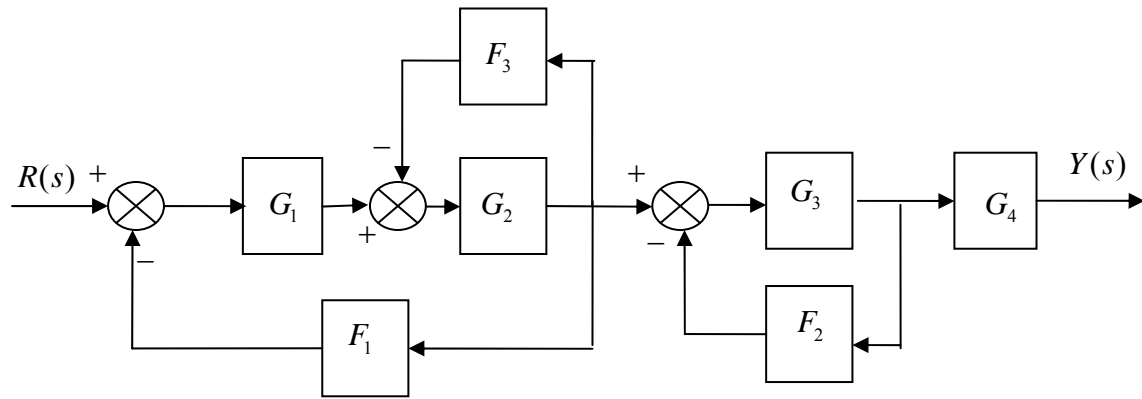
Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$Y(s) \left[\frac{1}{K} s(s+3)(s+2) + s(s+2) + s + 1 \right] = R(s) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\frac{1}{K} s(s+3)(s+2) + s(s+2) + s + 1} = \frac{K}{s(s+3)(s+2) + K[s(s+2) + s + 1]}$$

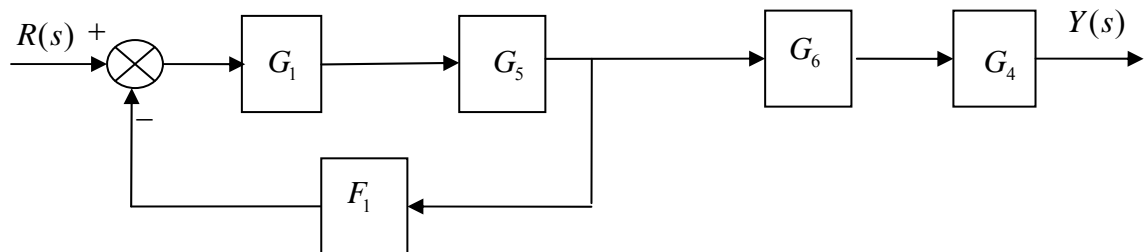
Άσκηση 2.5

Να απλοποιηθεί το διάγραμμα βαθμίδων του σχήματος



Λύση

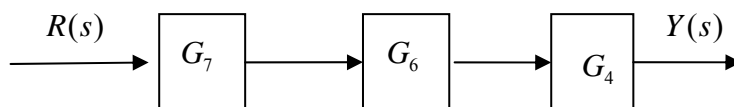
Το διάγραμμα βαθμίδων γίνεται



Όπου

$$G_5 = \frac{G_2}{1 + G_2 F_3} \quad \text{και} \quad G_6 = \frac{G_3}{1 + G_3 F_2}$$

Αυτό απλοποιείται ως εξής:

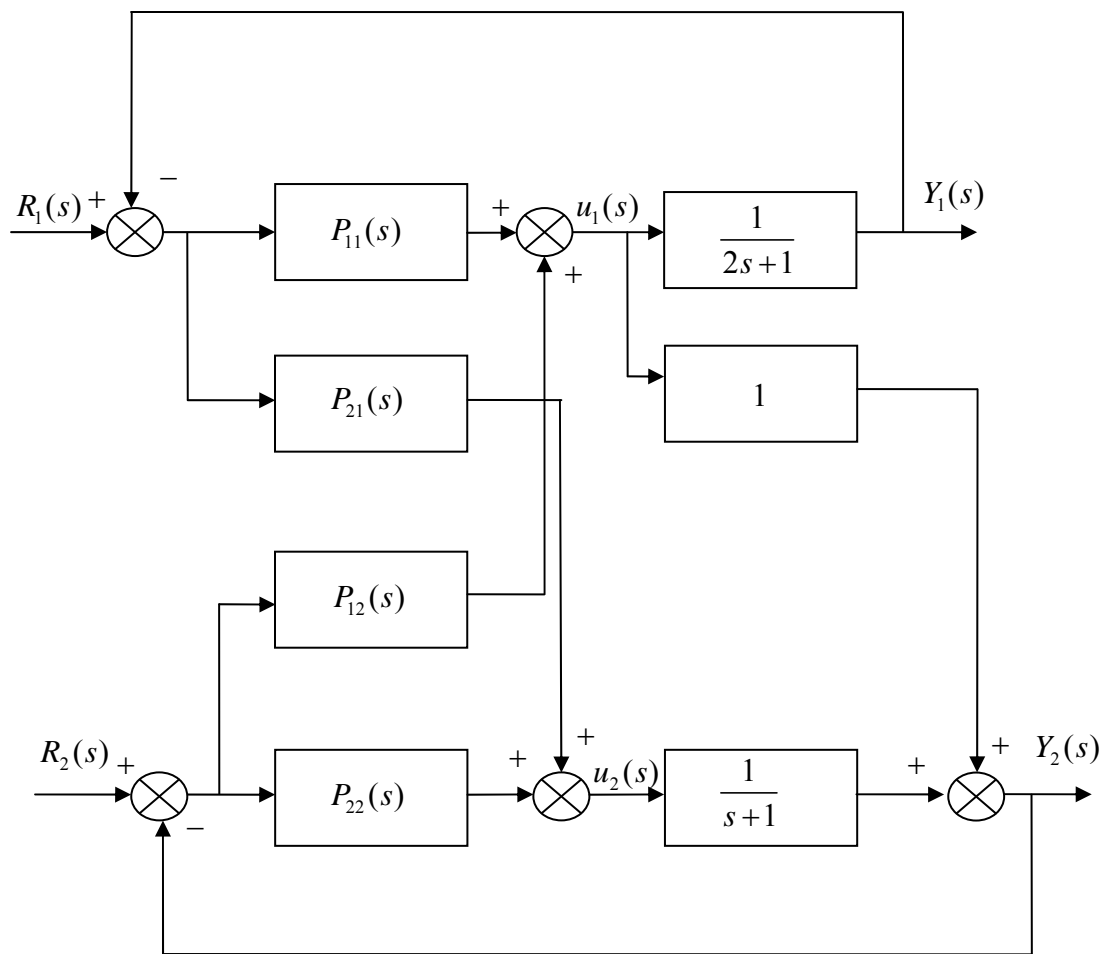


$$G_7 = \frac{G_1 G_5}{1 + G_1 G_5 F_1} = \frac{G_1 \frac{G_2}{1 + G_2 F_3}}{1 + G_1 F_1 \frac{G_2}{1 + G_2 F_3}} \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{(1 + F_2 G_3)(1 + G_1 G_2 F_1 + G_2 F_3)}$$

Άσκηση 2.6

Δίνεται το σύστημα



Να προσδιοριστούν τα P_{11} , P_{12} , P_{21} , P_{22} , έτσι ώστε ο πίνακας μεταφοράς του κλειστού συστήματος να είναι ο

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix}$$

(Το κλειστό σύστημα είναι αποσυζευγμένο).

Λύση

$$\left. \begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{1}{2s+1} u_1(s) \\ Y_2(s) &= u_1(s) + \frac{1}{s+1} u_2(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_1(s) &= P_{11}[R_1(s) - Y_1(s)] + P_{12}[R_2(s) - Y_2(s)] \\ u_2(s) &= P_{21}[R_1(s) - Y_1(s)] + P_{22}[R_2(s) - Y_2(s)] \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) - Y_1(s) \\ R_2(s) - Y_2(s) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) - Y_1(s) \\ R_2(s) - Y_2(s) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Θέτουμε

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Η (3) παριστά το ανοικτό σύστημα, δηλαδή τη σχέση μεταξύ σφάλματος και εξόδου.

Το κλειστό σύστημα προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} Y(s) &= P_0[R(s) - Y(s)] \Rightarrow Y(s) = P_0R(s) - P_0Y(s) \Rightarrow \\ Y(s) + P_0Y(s) &= P_0R(s) \Rightarrow [I + P_0]Y(s) = P_0R(s) \Rightarrow \quad (5) \\ Y(s) &= [I + P_0]^{-1} P_0R(s) \end{aligned}$$

Η τελευταία είναι η σχέση εισόδου – εξόδου.

Όπως είναι γνωστό, ο πίνακας μεταφοράς $P(s)$ οποιουδήποτε κλειστού συστήματος και ο πίνακας μεταφοράς $P_0(s)$ του αντίστοιχου ανοικτού, συνδέονται με τη σχέση

$$P(s) = [I + P_0(s)]^{-1} P_0(s) \quad (6)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει

$$\begin{aligned} [I + P_0(s)]P(s) &= P_0(s) \Rightarrow P(s) + P_0(s)P(s) = P_0(s) \Rightarrow \\ P_0(s)P(s) - P_0(s) &= -P(s) \Rightarrow P_0(s) - P_0(s)P(s) = P(s) \Rightarrow \quad (7) \\ P_0(s)[I - P(s)] &= P(s) \Rightarrow P_0(s) = P(s)[I - P(s)]^{-1} \end{aligned}$$

Η $P(s)$ δίνεται από την εκφώνηση. Θα είναι

$$I - P(s) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{5s}{5s+1} \end{bmatrix}$$

$$[I - P(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{5s+1}{5s} \end{bmatrix}$$

$$P(s)[I - P(s)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{5s+1}{5s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Έτσι, από τις (4), (7) και (8) προκύπτει

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix}$$

Λύνοντας ως προς τον πίνακα των αγνώστων, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2s+1} & 0 \\ 1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix} = (2s+1)(s+1) \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5s} \end{bmatrix} = \\ &= (2s+1)(s+1) \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & 0 \\ \frac{-1}{s} & \frac{1}{5s(2s+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s} & 0 \\ \frac{-(2s+1)(s+1)}{s} & \frac{s+1}{5s} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

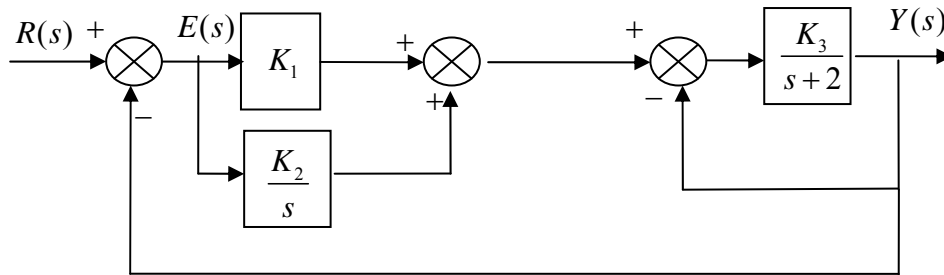
Άρα, οι πίνακες μεταφοράς που ζητούνται είναι

$$P_{11} = \frac{2s+1}{s}, \quad P_{12} = 0, \quad P_{21} = \frac{-(2s+1)(s+1)}{s}, \quad P_{22} = \frac{s+1}{5s}$$

Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση Α2.1

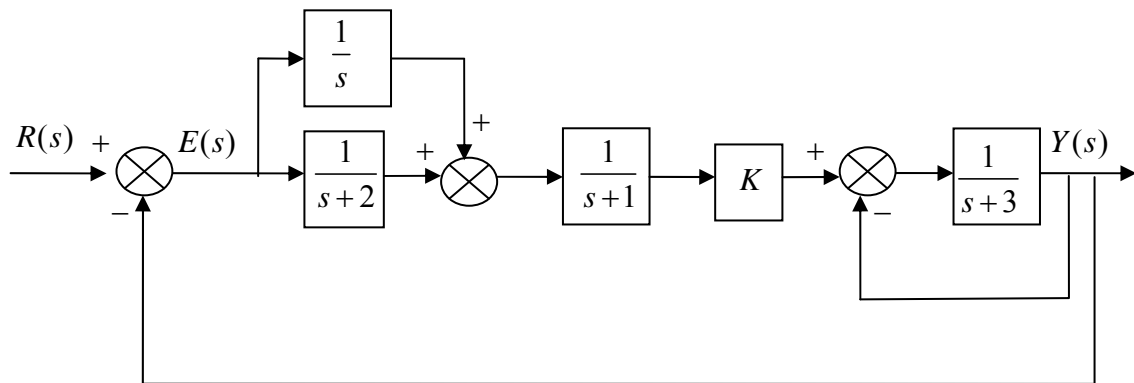
Δίνεται το σύστημα του παρακάτω σχήματος.



Να απλοποιηθεί το διάγραμμα βαθμίδων και να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς.

Άσκηση Α2.2

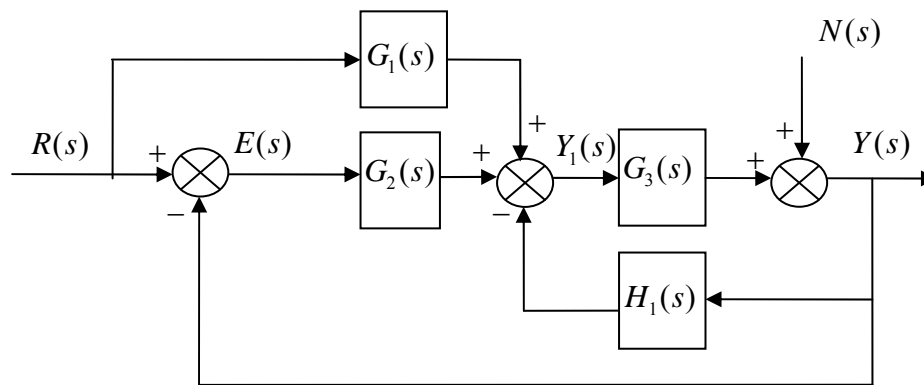
Δίνεται το σύστημα του σχήματος



Να απλοποιηθεί το διάγραμμα βαθμίδων και να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς.

Άσκηση Α2.3

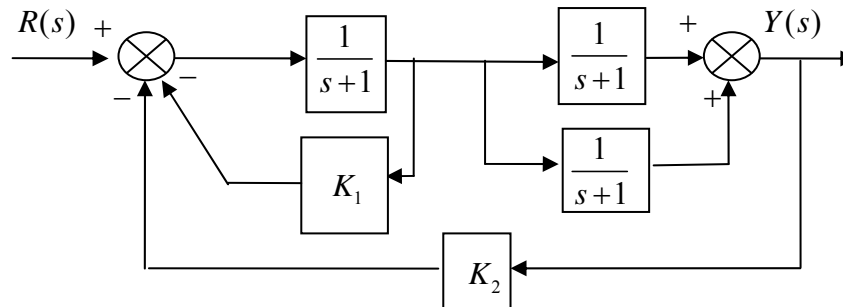
Δίνεται το διάγραμμα βαθμίδων του παρακάτω σχήματος



Να βρεθούν οι συναρτήσεις μεταφοράς $\left. \frac{Y(s)}{R(s)} \right|_{N=0}$ και $\left. \frac{Y(s)}{N(s)} \right|_{R=0}$.

Άσκηση Α2.4

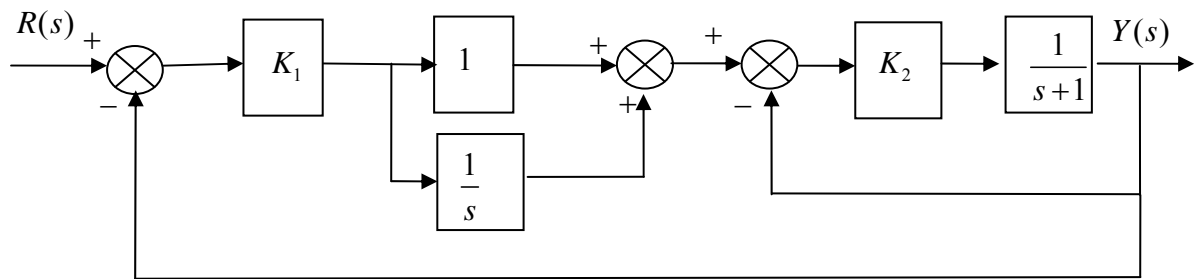
Δίνεται το σύστημα του παρακάτω σχήματος



Ζητείται να απλοποιηθεί το διάγραμμα βαθμίδων.

Άσκηση Α2.5

Δίνεται το σύστημα του παρακάτω σχήματος



Ζητείται να απλοποιηθεί το διάγραμμα βαθμίδων και να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς.